

ISPITNI ZADACI IZ KOMPLEKSNE ANALIZE

od JUNA 2000.

Profesori:

A i B smer: Arpad Takači

C i D smer: Mirko Budinčević

Asistent: Aleksandar Pavlović

JUN 2000.

1. Neka je $f(z) = \frac{\sin z}{z^3} \operatorname{Arctg} z$
 - a) Ispitati karakter svih singulariteta funkcije f .
 - b) Naći prvih nekoliko članova razvoja funkcije f u okolini tačke $z_0 = 0$ i naći rezidijum u toj tački.
2. Neka je $F(p) = \int_0^\infty \frac{x^p}{(x^2 + 1)^2} dx$
 - a) Naći oblast gde je ova funkcija analitička.
 - b) Naći potpuno analitičko produženje funkcije F . Na kom skupu je definisano?
3. Neka je $P(z) = z^7 + 5z^5 - 2z^2 + z - 1$. Odrediti broj nula polinoma P na skupu:
 - a) $|z| < 2$
 - b) $\operatorname{Re}(z) < 0 \cap \operatorname{Im}(z) > 0$
4. (CD) Neka je $\Omega = \{z \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ i neka je $f(z) = \operatorname{th} z$. Dokazati da je $f(\Omega) = \Omega$.
4. (AB) Neka je f analitička funkcija na otvorenom jediničnom krugu $K(0, 1)$ takva da je
$$|f(z)| \leq 1, \quad |z| < 1.$$
 - a) Ako je $f(0) = 0$, pokazati da funkcija $g(z) = \frac{f(z)}{z}$, $0 < |z| < 1$, ima otklonjiv (prividan) singularitet u tački $z = 0$.
 - b) Pokazati da je $|f(z)| \leq |z|$, $|z| < 1$.
 - c) Ako postoji $0 \neq w_0 \in K(0, 1)$ sa osobinom da je $|f(w_0)| = |w_0|$, tada postoji realan broj ϕ sa osobinom $f(z) = z \cdot e^{i\phi}$, $|z| < 1$.
 - d) Ako umesto uslova $f(0) = 0$ važi $f(z_0) = 0$, za neko $0 \neq z_0 \in K(0, 1)$, pokazati da je tada

$$|f(z)| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0} \right|, \quad |z| < 1.$$

JUL 2000.

1. Neka je funkcija $f(z)$ definisana pomoću funkcionalnog reda $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{(n^2 + z^2)(n^2 + 4)}$. Odrediti oblast analitičnosti, kao i eksplicitni oblik funkcije $f(z)$.
2. Ispitati karakter svih singularnih tačaka funkcije $f(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - z^2}}{z^3 \cos z} \operatorname{Arcth} z$, a zatim izračunati $\int_{|z|=\pi/4} f(z) dz$.
3. Odrediti analitičku funkciju $f(z)$, ako je njen imaginarni deo dat sa

$$v(x, y) = y \left(\frac{1}{(x - 2)^2 + y^2} - \frac{1}{(x - 1)^2 + y^2} \right)$$

4. (AB) Neka je f analitička funkcija na zatvorenom krugu $\overline{K(0, 1)} = \{z \mid |z| \leq 1\}$ oblika $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ i neka f bijektivno preslikava $\overline{K(0, 1)}$ na skup G čija je površina jednaka $P = m(G)$.
 - a) Pokazati da je $P = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} |f'(z)|^2 dx dy$
 - b) Prelaskom na polarne koordinate pokazati da je $P = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2$.
4. (CD) Dokazati pomoću Ruševove teoreme da jednačina $\cos z = e^z$ ima beskonačno mnogo rešenja.

SEPTEMBAR 2000.

1.(35) Dato je preslikavanje $F(z) = \frac{1 - \sqrt{1+z}}{z^4} \operatorname{Arctg} z$

a) Odrediti karakter svih singulariteta za $F(z)$.
b) Naći nekoliko članova razvoja Loranovog reda funkcije $F(z)$ u okolini nule za sve grane ovog preslikavanja.

c) Ako je $f(z)$ ona grana preslikavanja $F(z)$ za koju je je tačka 0 pol drugog reda naći $\int_{|z|<2/3} f(z) dz$

2. (25) Neka je $f(z) = \int_0^\infty \frac{\cos t}{t^z(t-i)} dt$. Odrediti oblast analitičnosti funkcije f i naći njeno potpuno analitičko produženje.

3. (20) Neka je $f(z) = -i \frac{z^2 + 2z - 1}{z^2 - 2z - 1}$ i neka je $\Omega = \{z \mid |z| \leq 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$.

Dokazati da je $f(\Omega) = \{z \mid |z| \leq 1\}$.

4. (20) Neka je $f(z) = z^5 + z^4 + 10z^3 + 2z^2 + 9z + 5$. Odrediti broj nula u

a) $|z| < 2$

b) prvom kvadrantu.

OKTOBAR 2000.

1. a) Naći vrednost integrala $f(a) = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + a^2 - 2a \cos x} dx$ gde je $a > 0$.

(Uputstvo: Integraliti funkciju $g(z) = \frac{z}{a - e^{-iz}}$ duž pravougaonika $|\operatorname{Re} z| \leq \pi, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq M$, gde $M \rightarrow +\infty$.)

b) Analitički produžiti funkciju f sa $(0, \infty)$ na najveću moguću oblast.

2. Funkcijom $f(z) = \cos z$ preslikati oblast $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid a < \operatorname{Re} z < b, c < \operatorname{Im} z < d\}$ gde je $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$, a $c > 0$.

3. Dokazati da bez obzira koliko veliko R izabrali, za dovoljno veliko n sve nule funkcije $f_n(z) = 1 + z + \dots + \frac{z^n}{n!}$ leže unutar oblasti $|z| > R$.

4. Izračunati $\int_{|z-1|=2} \left(\frac{z-1}{z}\right)^2 e^{\frac{z}{z-1}} dz$.

OKTOBAR II 2000.

1. Neka je K_n kvadrat čija su temena u tačkama $\pm(n + \frac{1}{2}) \pm i(n + \frac{1}{2})$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Pokazati da je $|\sin^2(\pi(x + iy))| = \sin^2(\pi x) + \operatorname{sh}^2(\pi y)$, za $z = x + iy \in K_n$.

b) Pokazati da je

$$|\sin(\pi z)| > \frac{1}{2}e^{\pi|y|}, \text{ za } z \in K_n, |x| = n + \frac{1}{2}$$

$$|\sin(\pi z)| \geq \frac{1}{4}e^{\pi(n+\frac{1}{2})}, \text{ za } z \in K_n, |y| = n + \frac{1}{2}.$$

c) Ako je f cela funkcija. Pokazati da je tada:

$$\oint_{K_n} \frac{f(z)dz}{\sin(\pi z)} = 2i \sum_{k=-n}^n f(k), \quad n \in \mathbb{N}.$$

d) Ako f još zadovoljava uslov $|zf(z)| \leq Me^{a|y|}$ za svako $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $0 \leq a < \pi$ i za neku konstantu $M > 0$, pokazati da je tada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=-n}^n (-1)^k f(k) \right) = 0.$$

2. Odrediti oblast u kojoj je integralom $g(p) = \int_{-1}^1 \frac{(1+x)^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2} dx$ definisana analitička funkcija.

Naći oblast analitičnosti funkcije g , kao i njeno potpuno analitičko produženje G .

3. Ispitati singularitete funkcije $f(z) = \frac{\sqrt{z^2 - z^4}}{\sin 2z^4} \operatorname{Arcthz}$ i izračunati $\int_{|z|=0.2} f(z)dz$.

4. Odrediti broj nula polinoma $f(z) = 4z^6 - 8z^5 + 5z^4 + 2z^3 + 5z^2 - 4z + 1$ u svakom kvadrantu.

NOVEMBAR 2000.

1. Neka je

$$f(z) = \frac{z \cos z}{(z^2 - 2z + 10)(z^2 + 1)}.$$

a) Razviti $f(z)$ u Loranov red u prstenu $1 < |z| < \sqrt{10}$.

b) Rešiti integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

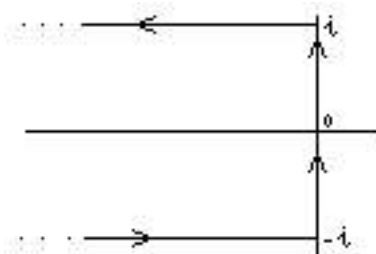
2. Naći broj nula polinoma $z^n + a_0z^2 + a_1z + a_2$ u $|z| < 1$ ako je $|a_0| > |a_1| + |a_2| + 1$.

3. Dati su funkcije definisane stepenim redovima:

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad f_2(z) = i\pi + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{n}.$$

Naći oblasti definisanosti ove dve funkcije i dokazati da se one međusobno produžuju.

4. Rešiti integral $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z dz}{\cos z}$, gde je C putanja data na slici.



DECEMBAR 2000.

1. Neka je $f(z) = \frac{\cos z}{(z-1)^2}$.
 - a) Izračunati koeficijente Loranovog reda po definiciji za funkciju $f(z)$ u okolini tačke $z = 1$.
 - b) Izračunati $\int_{|z-1|<1} f(z)dz$.
2. Konstruisati preslikavanje $w = f(z)$ koje konformno preslikava oblast $|z| < 1$, $0 < \arg z < \frac{\pi}{n}$ na poluravan $Im(w) > 0$.
3. Ako je $f(z)$ regularna funkcija u oblasti \mathcal{O} , a u tački $a \in \mathcal{O}$ funkcija i svi njeni izvodi su jednaki nuli, tada je $f(z) = 0$ za sve $z \in \mathcal{O}$. Dokazati.
4. Kompleksnom integracijom izračunati integral $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(x^2 + b^2)^2}$, gde je $a, b > 0$.

JANUAR 2001.

1. Pokazati da je funkcija $F(z)$, definisana nesvojstvenim integralom $F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+2zt} dt$, analitička u celoj kompleksnoj ravni i naći njen analitički izraz.
2. Izračunati: $\int_{|z|=5} \frac{zdz}{(1 - \cos z) \sin z}$
3. Ispitati karakter singulariteta funkcije $F(z) = \frac{\sqrt{z^2 - z^3}}{\sin^2 z^2} \operatorname{Arcthz}$ i razviti je u red u okolini tačke $z = 0$.
4. Odrediti broj nula polinoma $z^7 + 2z^5 - z^4 + 3z^3 - 2z^2 + z - 1$
 - a) u drugom i trećem kvadrantu
 - b) u prstenu $\frac{1}{4} \leq |z| < 2$

FEBRUAR 2001.

1. Neka je $F(z) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos zx}{1 + x^2 + x^4} dx$
 - a) Da li je funkcija F definisana za $z = iy$, gde je y realan broj?
 - b) Naći skup S na kom je funkcija F definisana.
 - c) Naći eksplicitan oblik funkcije $F(z)$ dok $z \in S$.
2. Primenom Ruševove teoreme dokazati osnovni stav algebre. (Polinom n -tog reda ima n kompleksnih nula.)
3. Funkcijom $f(z) = \frac{2z^2 - z - 4}{2 - z}$ preslikati oblast $\Omega = \{|z - 2| \leq 2\}$.
4. Odrediti oblast regularnosti funkcije $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + z^2)^2}$ i njen analitički izraz.

MART 2001.

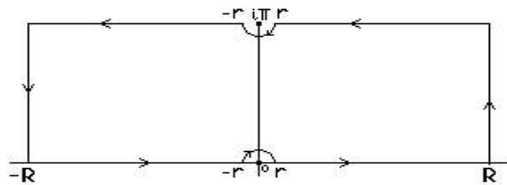
1. Kompleksnom integracijom izračunati integral: $\int_0^\infty \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \frac{\sin(ax)}{x} dx$, za $a, b > 0$.
2. Ispitati singularitete funkcije: $w = \frac{\sqrt{z^2 - z^4}}{\sin(2z^4)} \operatorname{Arcth} z$ i izračunati integral $\int_{|z|=0,2} w(z) dz$.
3. Funkcijom $w = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4a} z$ preslikati oblast $\Omega = \{z \in \mathbf{C} : 0 < \operatorname{Re} z < a\}$.
4. Naći oblast analitičnosti i naći analitičko produženje funkcije definisane redom $\sum_{n=1}^\infty \frac{z^{2n}}{n(n+1)}$ u što širu oblast.

MART II 2001.

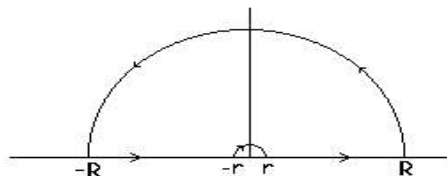
1. Naći $\int_0^\infty \cos^2 t dt$ i $\int_0^\infty \sin^2 t dt$ integraleći funkciju e^{-z^2} duž ruba oblasti $\{z : |z| < R \wedge 0 < \arg z < \pi/4\}$.
2. Ispitati singularitete funkcije $w = \frac{\sqrt{z^2 - z^4}}{\sin z^4} \operatorname{Arctg} z$ i izračunati integral $\int_{|z|=0,5} w(z) dz$.
3. Funkcijom $w = \exp\left(\frac{2\pi iz}{z-2}\right)$ preslikati oblast $\Omega = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 2 \wedge |z-1| > 1\}$.
4. Naći oblast analitičnosti i naći potpuno analitičko produženje funkcije $f(z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{t^2 + 1} dt$.

APRIL 2001.

1. Neka je $G(z) = \int_0^\infty \frac{\sin tz}{\operatorname{sh} t} dt$.
 - a) pokazati da je G analitiška na $D = \{z : |\operatorname{Im} z| < 1\}$.
 - b) Integraleći $\int_C \frac{e^{awi}}{\operatorname{sh} w} dw$ za $0 < a < \frac{1}{2}$ naći $G(a)$, gde je C kontura data na slici:



- c) Pokazati da je $H(z) = \frac{\pi}{2} \operatorname{th} \frac{\pi z}{2}$ analitičko produženje funkcije $G(Z)$ i odrediti oblast produženja.
2. Ispitati karakter singularnih tačaka funkcije $F(z) = \frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{1 - \cos z^2} \operatorname{Arcth} z$ i izračunati $\int_{|z|=0,5} f(z) dz$ gde je $f(z)$ ona grana funkcije $F(z)$ za koju je $z = 0$ pol drugog reda.
 3. Naći analitičku funkciju $f(z) = u + iv$ ako se zna da je $\operatorname{Im} f(z) = v\left(\frac{x}{y}\right)$, $f(1) = \pi$ i $f(-1) = \pi(1 + i)$.
 4. Integraleći funkciju $\frac{z}{1 + z^6} \ln z$ po konturi:



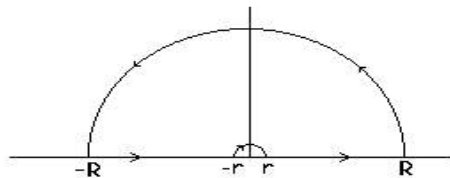
gde je $-\pi < \arg z < \pi$, izračunati $\int_0^\infty \frac{x}{1 + x^6} dx$.

MAJ 2001.

1. Neka je $f(z) = \frac{\sqrt{z^2 - z^3}}{\sin z^3} \operatorname{Arctg} z$. Ispitati karaktere svih singularnih tačaka i razviti je u Loranov red u okolini tačke $z = 0$.
2. Izračunati $\int_0^{2\pi} \frac{(1 + 2 \cos t)^n \cos nt}{1 - a - 2a \cos t} dt$, gde je $-1 < a < \frac{1}{3}$.
3. Izračunati $\int_{|z|=2} \frac{1}{z} \exp\left(\frac{1}{1-z}\right) dz$
4. Neka je $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} z^{2n}$. Odrediti oblast analitičnosti funkcije $f(z)$, njeno potpuno analitičko produženje $F(z)$ i oblast analitičnosti funkcije $F(z)$.

JUN 2001.

1. Odrediti oblast koja se preslikavanjem $w = \frac{2z-i}{z+i}$ preslikava na oblast $\Omega = \{w \in \mathbb{C} : 1 < |w| < 2\}$.
2. Odrediti broj nula polinoma $p(z) = z^5 + z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 15$
 - a) u krugu $|z| < 1$
 - b) u prvom i četvrtom kvadrantu.
3. Neka je $f(z) = \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{tz(t^2+1)} dt$
 - a) Dokazati da je f analitička na skupu $\{z : -2 < \operatorname{Re} z < 1\}$.
 - b) Pomoću $\int_C \frac{e^{iw}}{w^a(w^2+1)} dw$, $0 < a < 1$, odrediti potpuno analitičko produženje funkcije $f(z)$, gde je C kontura data slikom



4. (CD) Ispitati karakter svih singulariteta funkcije $f(z) = \frac{z \sin z}{z^6 - z^4} \operatorname{Arcth} z$ i razviti u red u okolini jednog od njih.
4. (AB) Neka je f meromorfna funkcija u \mathbb{C} , neka je P skup svih polova funkcije f i neka postoji rastući niz realnih brojeva $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ da je $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty$ sa osobinom

$$(*) \quad |f(r_n e^{it})| \leq M, \quad n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}.$$

Neka je K_n pozitivno orjentisana centralna kružnica poluprečnika r_n , i neka je $w \in \mathbb{C} \setminus P$.

- a) Pokazati da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \oint_{K_n} \frac{f(z) dz}{z^2 - w^2} = 0$, i na osnovu toga dokazati jednakost:

$$f(w) - f(-w) = -2w \sum_{a \in P} \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{z^2 - w^2}, a\right).$$

- b) Ako je $r_n = n\pi$, pokazati da funkcija $f(z) = \operatorname{tg} z$ zadovoljava uslov (*).
(UPUTSTVO: Koristiti da za svako $a > 0$ postoji konstanta $A > 0$ da ako je $|\operatorname{Im} z| \geq a$, onda je $|1 + e^{2iz}| \geq A$.)

- c) Pokazati da je $\operatorname{tg} w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2w}{w^2 - ((2n+1)\frac{\pi}{2})^2}$, za $w \neq \pm \frac{2n+1}{2}\pi$.

JUL 2001.

1. Izračunati $\int_0^\infty \frac{x^2 \cos ax}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)} dx$, gde je $a > 0$.
2. Ispitati karakter svih singulariteta $F(z) = \frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{z^3(z + 1)} \operatorname{Arcth} z$ i razviti u je red u okolini jednog od njih.
3. Neka je $f(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{3k + 1} z^{3k}$. Naći oblast definisanosti funkcije f , njeno potpuno analitičko produženje $F(z)$, kao i oblast analitičnosti funkcije $F(z)$.
4. Odrediti broj nula polinoma $P(z) = z^6 - z^5 + 6z^4 - 5z^3 + 8z^2 - 4z + 1$ po kvadrantima.

AVGUST 2001.

1. Naći analitičku funkciju $f(z)$ ako je njen realni deo

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + e^x \cos y + x \sin x \operatorname{ch} y - y \cos x \operatorname{sh} y$$

2. Ispitati singularitete funkcije $f(z) = \frac{\sqrt{z^2 - z^4}}{1 - \cos z^2} \operatorname{Arcthz}$ i rešiti integral $\int_{|z|=0.2} f(z) dz$.
3. Razviti funkcije $f(z) = \frac{z^2}{\sin^5 z}$ u okolini nule.
4. Dat je polinom $P(z) = z^8 + z^7 - 5z^4 + 20z^3 + z + 4$
 - a) Odrediti broj nula na skupu $\{z : 1 < |z| < 3\}$.
 - b) Dokazati da polinom nema realnih pozitivnih nula.
 - c) Odrediti broj nula u prvom kvadrantu.
5. Naći oblast analitičnosti i potpuno analitičko produženje funkcije $\sum_{n=1}^\infty \frac{z^{2n}}{n(n+1)}$

SEPTEMBAR 2001.

1. (20) Ispitati karakter svih singulariteta funkcije $f(z) = \frac{\sqrt{4z^2 - z^4}}{1 - \cos^3 z^2} e^{(\frac{1}{\pi-z})} \operatorname{Arctg} z$.
2. (20) Izračunati $\int_{|z|=5} \frac{z}{\sin z(1 - \cos z)} dz$.
3. (20) Neka je $f(z) = \int_0^1 t^z (1-t)^{-z} dt$.
 - a) (20) Odrediti oblast analitičnosti funkcije $f(z)$.
 - b) (20) Naći njeno potpuno analitičko produženje $F(z)$.
4. (CD) (20) Izračunati $\int_0^\infty \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$.
4. (AB) (20) Neka je Ω otvorena oblast koja sadrži $\overline{K(0, 1)}$, neka je $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ i neka za $|z| = 1$ važi da je $|f(z)| < 1$. Pokazati da postoji jedinstveno z_0 da je $|z_0| < 1$ i $f(z_0) = z_0$.

OKTOBAR 2001.

1. Naći $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx$ i $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 10} dx$.
2. Naći $\int_{|z-1|=2} \sin \frac{z}{1-z} dz$.
3. Neka je $f(z) = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + z^2)^2} dx$. Dokazati da je f analitička na skupu $\Omega = \{z : \operatorname{Re} z \neq 0\}$ i naći njeno potpuno analitičko produženje u analitičko obliku.
- 4.(AB) Dokazati da ako je $f(z)$ analitička funkcija za $|z| < 1$ i $f(0) = 0$ i $|f(z)| \leq 1$, tada svuda unutar kruga $|z| < 1$ važi $|f(z)| \leq |z|$.
Ako postoji tačka z_0 da je $0 < |z_0| < 1$ i $|f(z_0)| = |z_0|$ onda je $f(z) = e^{i\alpha} z$ za $|z| < 1$.
- 4.(CD) Preslikati oblast $\Omega = \{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ funkcijom $f(z) = \frac{2z - i}{2 + iz}$.

OKTOBAR II 2001.

1. (20) Neka je $f(z) = \frac{\sqrt{4z^2 - z^4}}{z^k(1 - \cos^3 z^2)}$. Ispitati karakter svih singulariteta funkcije f i odrediti parametar k tako da f u nuli ima pol prvog reda. Za takvo k rešiti integral $\int_{|z|=1} f(z) dz$.
2. (20) Rešiti $\int_{|z-1|=2} z \cos \frac{z}{1-z} dz$.
3. (40) Neka je $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 + z^2)^2}$. Dokazati da je f analitička na oblasti $\Omega = \{z : \operatorname{Re} z \neq 0\}$ i naći njeno potpuno analitičko produženje i analitičkom obliku.
4. Dat je polinom $p(x) = z^8 + 15z^6 + z^5 + 2z^4 + 4z^3 + z^2 + 3z + 3$. Odrediti broj nula
a) (8) na skupu $\{z : |z| < 1\}$.
b) (12) u prvom i u četvrtom kvadrantu.

NOVEMBAR 2001.

1. (25) Dato je preslikavanje $F(z) = \frac{1 - \sqrt{1+z}}{z^4} \operatorname{Arctg} z$
a) Odrediti karakter svih singulariteta za $F(z)$.
b) Naći nekoliko članova razvoja Loranovog reda funkcije $F(z)$ u okolini nule za sve grane ovog preslikavanja.
2. (35) Neka je $f(z) = \int_0^{\infty} \frac{1}{t^z(t^2 + 1)} dt$. Odrediti oblast analitičnosti funkcije f i naći njeno potpuno analitičko produženje.
3. (20) Neka je $f(z) = -i \frac{z^2 + 2z - 1}{z^2 - 2z - 1}$ i neka je $\Omega = \{z \mid |z| \leq 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$.
Dokazati da je $f(\Omega) = \{z \mid |z| \leq 1\}$.
4. (20) Neka je $f(z) = z^5 + z^4 + 10z^3 + 2z^2 + 9z + 5$. Odrediti broj nula u
a) $|z| < 2$
b) prvom kvadrantu.

DECEMBAR 2001.

1. Ako je funkcija $u = u(\rho, \theta) = \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\rho}$ realni deo jedne analitičke funkcije $f(z)$ ($z = \rho e^{i\theta}$), odrediti $f(z)$.

2. Dokazati da je $\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2bx \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$, gde je $b > 0$.

Uputstvo: Integraliti funkciju $f(z) = e^{-z^2}$ po ivici pravougaonika $|x| \leq R$, $0 \leq y \leq b$.

3. Pokazati da je Gama-funkcija $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ analitička za $\operatorname{Re} z > 0$.

4. Izračunati integral $\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z}{e^{2\pi iz} - 1} dz$

5. Oblast $\{z : |z - 3| < 3, |z - 2| > 2, |z - 5| > 1\}$ preslikati inverzijom $f(z) = \frac{1}{z}$.